Le rôle de l'option d'achat dans les enchères séquentielles

Eric Beyrath Jacky Mochel

31 mars 2003

Table des matières

1 Introduction

Lors de la vente de plusieurs unités d'un même bien, les maisons d'enchères optent souvent pour une *vente séquentielle*, c'est-à-dire que les différents items sont vendus aux enchères successivement et séparément les uns des autres. La question naturelle que se pose le propriétaire d'un des biens est de savoir à quel moment il doit mettre son bien en vente afin de s'assurer un gain aussi élevé que possible. Doit-il être proposé en tant que premier objet ou vaut-il mieux au contraire attendres et le vendre plus tard ?

Nous verrons dans ce mémoire que le prix de vente d'un bien dépend de plusieurs paramètres, et notamment du choix du type d'enchères effectué ainsi que de la présence ou non d'une option d'achat.

1.1 Option d'achat : définition et intérêt

Définissons pour commencer ce que nous entendons par option d'achat : l'*option d'achat* est un paramètre-clé qui permet au vainqueur d'une enchère d'acheter autant d'unités du bien qu'il le souhaite, et ce au prix auquel il a emporté l'enchère. L'introduction d'une telle option peut conduire à des conclusions différentes de celles obtenues en l'absence de cette option. En effet, avec une option d'achat, tout acheteur doit, lorsqu'il fait son offre, prendre en compte un paramètre supplémentaire : l'incertitude liée au déroulement effectif d'une deuxième enchère. Il n'y a aucune garantie qu'une deuxième enchère ait effectivement lieu, le vainqueur de la première enchère ayant la possibilité d'acheter toutes les unités du bien proposées à la vente. Il en résulte une stratégie d'offre modifiée pour les acheteurs potentiels. En outre, dans certains types d'enchères (au second prix ou enchère anglaise), un acheteur se doit également d'être attentif au fait que, même s'il ne remporte pas l'enchère, le niveau de son offre aura des conséquences sur l'exercice ou non de l'option d'achat : si le prix qu'il propose est suffisamment élevé, il sera prohibitif pour le vainqueur de l'enchère d'exercer son option, si bien qu'une deuxième enchère aura lieu. Tous ces concepts stratégiques seront largement développés dans la suite de ce mémoire.

Remarquons que la mise en place d'une option d'achat présente un intérêt significatif, puisque l'inconvénient majeur d'une vente aux enchères sans option d'achat est la durée de la vente. En effet, pour chaque unité de bien proposée, on procède à une enchère, ce qui peut prendre beaucoup de temps si le nombre de biens mis en vente est grand. La mise en place de l'option d'achat permet d'accélérer de manière considérable le processus, dans la mesure où un acheteur a la possiblité d'acheter d'un seul coup autant d'unités qu'il le désire. Cette flexibilité offerte par l'option d'achat permet donc de gagner un temps précieux. En outre, elle convient à tout type d'acheteurs (du particulier intéressé par un exemplaire du bien au grossiste souhaitant acheter en grandes quantités), ce qui explique son succès et son instauration très fréquente dans les diverses ventes aux enchères à travers le monde. C'est ainsi que l'on retrouve l'option d'achat aussi bien dans les ventes aux enchères de roses à Aalsmeer aux Pays-Bas, dans la vente de vins et de champagnes à Drouot en France ou chez Christie's & Sotheby's en Angleterre ou encore dans la vente de manteaux de fourrure à Leningrad.

1.2 Les différents types de ventes aux enchères

La différence majeure entre ces diverses ventes aux enchères consiste précisément dans le choix du type d'enchères. On en distingue traditionnellement quatre :

- *L'enchère au premier prix* : chaque acheteur potentiel propose sous enveloppe scellée un prix pour le bien proposé ; le vainqueur est celui qui propose le prix le plus élevé, il reçoit l'objet et paie le *bid*.

- *L'enchère au second prix ou enchère de Vickrey* : elle fonctionne sur le même principe que l'enchère au premier prix, à la différence près que le vainqueur ne paie pas le prix qu'il a proposé pour l'objet, mais le second prix le plus élevé proposé par un autre acheteur.

- *L'enchère descendante ou enchère hollandaise* (pratiquée par exemple dans les ventes de fleurs aux Pays-Bas) : le commissaire-priseur décide d'un prix de départ (très exagéré pour le bien considéré) puis met en marche une montre (dont l'aiguille désigne le prix à payer et parcourt le sens trigonométrique) ; le prix décroît continûment jusqu'à ce qu'un acheteur arrête la montre. Le prix affiché par la montre au moment où celle-ci est stoppée est le prix payé par l'acheteur.

- *L'enchère ascendante ou enchère anglaise* (pratiquée à Drouot ou chez Christie's & Sotheby's) : le commissaire-priseur met en marche une montre dont l'aiguille tourne cette fois dans le sens habituel ; au fur et à mesure que le prix augmente, les acheteurs se retirent. Le vainqueur est celui qui est le dernier encore en course, et il paie le prix auquel le "finaliste" (c'est-à-dire l'avant-dernier concurrent en lice) s'est retiré.

Nous nous intéressons plus particulièrement à travers ce mémoire à deux types d'enchères parmi les quatre présentées ci-dessus : les enchères anglaises et les enchères au second prix. Nous avons choisi de traiter ces deux types d'enchères car, d'une part, elles conduisent à des résultats relativement similaires et d'autre part, ce sont les seules enchères pour lesquelles nous disposons à l'heure actuelle de stratégies d'équilibres théoriques (contrairement aux enchères hollandaises ou au premier prix). Nous mettrons plus particulièrement l'accent sur les résultats théoriques obtenus à ce jour, suivant la possibilité ou non d'exercer une option d'achat, tant du point de vue de l'acheteur que du point de vue du vendeur, en vue de les confronter aux résultats expérimentaux.

2 Stratégies sans option d'achat

2.1 Enchères sans option d'achat

Nous considérons la mise en vente de deux biens, auprès de deux acheteurs (qu'on appellera souvent joueurs 1 et 2 dans la suite), dans un système d'enchères au second prix ou d'enchères ascendantes, sans option d'achat. La valuation v_i de chaque joueur, c'est à dire la valeur qu'il attribue à l'objet, est supposée choisie uniformément dans $[0, \overline{v}]$. Chaque joueur a également une valuation représentative du bien-être que lui procure l'acquisition d'un deuxième objet. Nous utilisons le paradigme IPV (*Independent Private Value*) développé par Balck & De Meza.

Nous supposerons dans ce qui suit que ces deux valuations sont reliées entre elles par le paramètre k : si le joueur i attribue la valuation v_i au premier objet qu'il acquiert, sa valuation pour l'obtention du second objet sera donnée par $k\,v_i$. k est une constante de l'objet, il s'agit d'un paramètre connu de tous et commun à tous les joueurs. Il sera égal à 1 pour des biens dont l'utilité est toujours la même, par exemple une bouteille de vin ; il sera supérieur à 1 si l'objet est plus utile "par paire", par exemple une collection d'oeuvres d'art d'un même artiste, et k sera inférieur à 1 si avoir un second bien identique apporte peu à son acheteur, par exemple un bouquet de roses.

On note encore $b_1(v)$ l'offre au premier tour d'un joueur ayant la valuation v, et b_2^w l'offre au second tour du vainqueur, b_2^l l'offre au second tour du perdant de la première manche. Nous noterons enfin dans tout ce qui suit p_1 (respectivement p_2) le prix d'attribution de l'objet 1 (respectivement 2).

2.2 Stratégies d'équilibre

La proposition suivante précise les équilibres de Nash des enchères considérées :

Proposition *: Dans le cas d'enchères Vickrey ou anglaises, l'offre pour le premier bien est $b_1(v) = k\,v$. Le gagnant offre pour le second bien $b_2^w(v, p_1) = k\,v$, tandis que le perdant offre pour le second bien $b_2^l(v, p_1) = v$.*

Avant d'en venir à la démonstration de ce résultat, commentons la conclusion de ce théorème. Il peut en effet sembler surprenant de prime abord que chaque joueur offre pour l'objet 1 la valuation qu'il accorde à l'objet 2. Cette attitude est tout à fait intuitive si la valuation des 2 objets est la même pour chaque acheteur (cas $k = 1$). Si $k < 1$, proposer une offre inférieure à sa propre valuation s'explique par le fait que l'acheteur qui perd la première enchère sait que lors de la deuxième enchère, le vainqueur proposera une offre plus faible que lui (puisque le vainqueur sera en course pour obtenir son second item, alors que le perdant est toujours en quête de son premier item). Si $k > 1$, il est nécessaire de surenchérir dès la première offre, car sinon, le vainqueur de la première enchère remportera également la deuxième enchère.

Et lors de la seconde enchère, la stratégie dominante consiste pour chaque joueur à proposer la valuation de l'item pour lequel il joue : $k\,v_i$ s'il a remporté la première enchère (et donc qu'il joue pour un second item) et v_i s'il a perdu et convoite son premier objet.

2.3 Démonstrations partielles

2.3.1 Cas d'une enchère au second prix

– Au second tour, il ne reste plus qu'un seul bien à attribuer, et tout se passe comme dans le cas d'une enchère simple. En notant b^i sa mise et b^j celle de son adversaire, l'utilité espérée pour le joueur i si sa valuation est v_i' est (en notant g une densité positive) :

$$\begin{aligned} U_i &= \int_{b^j} (v_i' - b^j)\, 1_{b^i > b^j}\, g(b^j)\, db^j \\ &= \int_{b^j=0}^{b^i} (v_i' - b^j)\, g(b^j)\, db^j \\ \\ \frac{\partial U_i}{\partial b^i} &= (v_i' - b^i)\, g(b^i) \\ &= 0 \\ \Rightarrow v_i' = b^i & \end{aligned}$$

La stratégie dominante pour chaque joueur est donc de miser la valuation qu'il porte au bien, qui est v_i pour le perdant de la première manche et $k\, v_i$ pour le gagnant.

– Au premier tour, il faut distinguer selon les valeurs prises par k.
- $k \leq 1$: à l'équilibre symétrique, la fonction qui à v_i associe b_1 est la même pour les 2 joueurs. Ainsi, le joueur 1 peut par exemple deviner la valuation du joueur 2 pour l'objet en inversant la fonction b_1 : $v_2 = b_1^{-1}(b^2)$. En écrivant le gain espéré par le joueur 1, et en le maximisant, une condition d'équilibre donne le résultat souhaité : $b_1(v) = k\, v$.
- $k = 2$: si le joueur 1 par exemple dévie de sa stratégie optimale dans la première manche en misant $b_1(x)$, où x est proche de sa valuation v_1, alors soit il perd cette manche, et perdra alors la seconde également (puisque par croissance de la fonction $b_1(.)$ cela signifie que $v_2 > x$, et donc on aura aussi $2\, v_2 > v_1$ si x est proche de v_1), soit il l'emporte, et emportera la seconde également. Son gain est donc $U(x) = \int_{w=0}^{x} [v_1 - b_1(w) + 2\, v_1 - w]\, dw$. La déviation ne doit pas être profitable, ce qui revient à dire que U doit être maximale en v_1. Or $U'(v_1) = 2\, v_1 - b_1(v_1) = 0$.

$b_1(v) = k\, v$ est bien une *condition nécessaire d'équilibre de Nash*. C'est aussi *une condition suffisante*, car aucun joueur n'a intérêt à dévier : diminuer son offre au premier tour diminue ses chances de l'emporter avec bénéfice, et augmenter son offre ne fait qu'augmenter les chances d'emporter le lot à perte.

2.3.2 Cas d'une enchère anglaise

- Cas $k \leq 1$: le joueur 1 cherche à maximiser son utilité qui vaut :
  – $v_1\, (1 + k) - b_1(v_2) - v_2$ s'il acquiert les 2 biens, i.e. si $b_1(v_1) > b_1(v_2)$ et $k\, v_1 > v_2$
  – $v_1 - b_1(v_2)$ s'il n'acquiert que le premier, i.e. $b_1(v_1) > b_1(v_2)$ et $k\, v_1 < v_2$
  – $v_1 - k\, v_2$ s'il n'acquiert que le second, i.e. $b_1(v_1) < b_1(v_2)$ et $v_1 > k\, v_2$
  – 0 s'il perd les deux biens, i.e. $b_1(v_1) < b_1(v_2)$ et $v_1 < k\, v_2$

  En écrivant le gain sous forme d'intégrale, puis en dérivant, nous obtenons qu'une condition suffisante d'équilibre est $b_1(v) = k\, v$.

- Cas $k = 2$: notons $U(\epsilon, p)$ l'espérance de gain du joueur 1 s'il décide au temps p (proche du temps d'arrêt optimal $b_1(v_1)$) de rester en jeu jusqu'au temps $p + \epsilon$:

$$U(\epsilon, p) = \int_{b^{-1}(p)}^{b^{-1}(p+\epsilon)} (v_1 - b_1(w) + 2\,v_1 - w)\,\frac{dw}{\overline{v} - b^{-1}(p)}$$

  En effet, le joueur 1 ne peut gagner que si 2 se retire durant cette période, c'est à dire si $p \leq b_1(v_2) \leq p+\epsilon$. Et s'il gagne la première enchère, il emportera aussi la seconde, car p étant proche de v_1, $2\,v_1$ sera également supérieur à v_2. De même s'il perd la première, il perdra la seconde. La densité $\frac{dw}{\overline{v}-b^{-1}(p)}$ est la densité uniforme de v_2 sur $\overline{v} \geq v_2 \geq b^{-1}(p)$. En dérivant par rapport à ϵ, puis en annulant cette dérivée en $\epsilon = 0$, $p = b_1(v_1)$, on aboutit à la condition d'équilibre $b_1(v_1) = 2\,v_1$.

Pour montrer que l'équilibre est effectivement un équilibre de Nash, il faut remarquer que les joueurs n'ont aucun intérêt à dévier. Si le joueur 1 dévie et s'arrête à $p < v_1$, il va perdre le premier objet et emporter le second si $p/2 \leq v_2 \leq v_1/2$, ce qui lui procurera un gain $v_1 - 2\,v_2$. Rester jusqu'à $p = v_1$ aurait alors été plus efficace, puisqu'il aurait gagné les deux objets avec un profit supérieur $v_1 - 2\,v_2 + 2\,v_1 - v_2$. S'il dévie en jouant $v_1 < p < 2\,v_1$, perdre la première enchère conduit à perdre la seconde, on peut donc améliorer sa situation en jouant $p = 2v_1$. Enfin, dévier en jouant $p > 2\,v_1$ n'améliore pas l'utilité du joueur 1 mais peut la diminuer dans certains cas.

2.4 Evolution des prix de vente des 2 objets

Si les 2 joueurs jouent la stratégie d'équilibre, nous avons le résultat suivant (valable dans le cas $k \leq 1$) :

Proposition *Si $k \leq 1$ et si les 2 valuations de chaque acheteur sont reliées par $v_2 = k\ v_1$, alors le second item est vendu à un prix plus élevé que le premier item.*

Ce résultat se démontre sans peine : si $v^i > v^j$, le premier objet est vendu au prix $p_1 = k\ v^j$, et le second au prix $p_2 = \min(k\ v^i, v^j)$. On a dans tous les cas $p_1 < p_2$, ce qui montre bien une *augmentation des prix dans le cas d'une enchère sans option d'achat.* Nous reviendrons sur ce point lorsque nous aborderons les résultats empiriques obtenus lors d'expérimentations.

2.5 Extension au cas multi-joueurs

L'étude précédente porte sur le cas où seulement deux joueurs participent aux enchères. Ceci n'étant pas le cas général, nous nous proposons dans cette partie d'aborder le cas d'une vente aux enchères anglaises, à laquelle participent $n \geq 2$ joueurs. Nous adoptons les mêmes notations que précédemment, à savoir : v_i désigne la valuation du premier objet pour le joueur i, connue de lui seul, et kv_i est alors la valuation portée au second bien, k étant commun à tous les joueurs. Nous notons encore p_1 (respectivement p_2) le prix d'attribution du premier objet (respectivement du second).

Proposition *: En l'absence d'option d'achat, la stratégie d'équilibre est donnée par :*
- *au premier tour : tant que 3 joueurs au moins sont encore en jeu, chaque joueur reste en course jusqu'à sa propre valuation ; une fois qu'il ne reste que les 2 joueurs ayant la*

plus forte valuation, chacun adopte la stratégie b définie par :

$$b(v) = \begin{cases} v_{n-2} & si \; v_{n-2} \leq v \leq v_{n-2}/k \\ k\,v & sinon \end{cases}$$

– *dans l'enchère pour le second bien, chaque joueur joue la valuation qu'il accorde au bien.*

On retrouve le même comportement à l'équilibre lors du second tour que celui vu dans le cas $n = 2$: jouer sa valuation au second tour est une stratégie dominante pour chaque joueur (la démonstration est dans le même esprit que dans le cas où seulement deux joueurs s'affrontent).

3 Stratégies avec option d'achat

Voyons maintenant de quelle façon les résultats précédents sont modifiés si l'on introduit la possibilité d'exercer une option d'achat permettant au vainqueur de la première enchère d'acheter le deuxième item au même prix que le premier. Remarquons bien qu'en présence de l'option d'achat, il n'est pas sûr qu'une seconde enchère suive la première. Un acheteur doit à présent tenir compte de ce paramètre, mais également être conscient de l'importance du bid qu'il propose : en effet, même si son bid ne lui permet pas de remporter l'objet, son offre peut avoir pour effet de bloquer l'exercice de l'option (si son bid excède la valuation du vainqueur de la première option), lui donnant alors la chance d'acquérir le second objet lors de la seconde enchère. A priori, ceci devrait motiver le joueur à enchérir de façon plus agressive (de peur de perdre les 2 objets s'il perd la première enchère et que le vainqueur exerce son option). Nous allons préciser ce point dans la section suivante.

3.1 Stratégies d'équilibre

La proposition suivante précise les équilibres de Nash des enchères considérées :

Proposition *: Dans tous les cas, les stratégies de deuxième enchère (si celle-ci a lieu) sont les mêmes que dans le cas précédent où il n'y a pas d'option d'achat.*
Au premier tour :
- *si $k > 1$, chaque joueur mise $b_1(v) = k\,v$, et le vainqueur n'exerce pas l'option.*
- *si $k = 1$, chaque joueur mise $b_1(v) = v$, et le vainqueur est indifférent entre exercer ou non son option.*
- *si $k < 1$, par exemple $k = 1/2$, $b_1(v)$ est solution de l'équation $b_1(v) - v/2 = 2\,\lambda\,(v - b_1(v))\,b_1'(v)$, où $\lambda = 0$ si $b_1(v) \geq \frac{1}{2}\overline{v}$ et $\lambda = 1$ sinon. Le vainqueur exerce son option si et seulement si $p_1 \leq \frac{1}{2}v$.*

Ces résultats appellent quelques commentaires : on remarque que dans le cas $k \geq 1$, *l'introduction de l'option d'achat ne modifie pas le comportement des joueurs*. En effet, dans ces deux cas, il n'y a aucun intérêt *strict* à exercer l'option d'achat, puisque si le vainqueur venait à l'exercer, il achèterait ainsi les deux objets pour un prix total de $2\,k\,v$, alors que sa valuation pour l'ensemble des deux objets ne s'élève qu'à $(1+k)\,v$. Toutefois, le cas $k = \frac{1}{2}$ (et plus généralement $k < 1$) présente des différences significatives : le bid proposé $b_1(v)$ vérifiant $b_1'(v) > 0$ et $b_1(v) < v$, on en déduit que $b_1(v) > \frac{v}{2}$, d'où *une tendance à surenchérir* par rapport au prix proposé en l'absence d'option d'achat ($\frac{v}{2}$). Ce comportement s'explique par l'importance accordée par les joueurs à l'objet 1 et à son acquisition, puisque le vainqueur de cet objet peut exercer son option et remporter le second objet sans qu'une nouvelle enchère n'ait lieu, d'où le bid plus élevé.

3.2 Démonstrations partielles

3.2.1 Cas d'une enchère au second prix

Si l'option n'est pas exercée, les joueurs se comporteront au second tour comme dans le cas d'une enchère simple, et chacun misera la valuation qu'il accorde à l'objet.

Au premier tour, dans le cas $k > 1$: si l'on choisit ex-ante de ne pas exercer l'option, le vainqueur du premier tour (disons le joueur 1) va obtenir le premier objet au prix $k\,v_2$.

Sachant qu'il obtiendra le second au prix v_2, il n'a effectivement aucun intérêt à dévier et à exercer l'option qui lui procurerait le second objet à un prix strictement supérieur.

3.2.2 Cas d'une enchère anglaise

- $k \geq 1$ la démonstration est identique à celle du cas $k = 1/2$ dans les enchères au second prix ; elle résulte d'une condition d'équilibre à l'optimum.
- $k = 1/2$: exercice de l'option : supposons que le joueur 1 ait remporté le premier bien. Remarquons tout d'abord que si $b_1(v_2) > v_2$, il n'y a pas d'intérêt à exercer l'option, car le joueur 1 peut emporter le second bien au prix v_2 alors qu'il a acquis le premier au prix $b_1(v_2)$. On rejoint le cas sans option avec 2 enchères successives. Dans la suite, on suppose $b_1(v_2) \leq v_2$.
  Si $\frac{v}{2} > p_1 = b_1(v_2)$, il vaut mieux exercer l'option, puisqu'elle permet d'acquérir le second bien à $b_1(v_2)$ avec utilité $\frac{1}{2}\, v_1 - b_1(v_2)$. Sinon, l'utilité serait $\max(0, \frac{1}{2}\, v_1 - v_2)$, qui est inférieure. Réciproquement si $\frac{v_1}{2} < p_1 = b_1(v_2)$, il ne faut clairement pas utiliser l'option.
  Au premier tour : on se restreint assez intuitivement au cas $b_1(v) \geq \frac{1}{2}\, v$. Supposons que l'horloge ait atteint p proche de $b_1(v_1)$, et donc que $p < b_1(v_2)$. Appelons $U(\varepsilon, p)$ l'utilité espérée du joueur 1 s'il décide de rester en course jusqu'à $p + \varepsilon$.
  - Si le joueur 2 se retire entre temps, le joueur 1 emporte le premier objet, mais n'exerce pas l'option ($\frac{1}{2}\, v_1 \leq p \sim b_1(v_1)$) et perd au second tour ($\frac{1}{2}\, v_1 < v_2 \sim v_1$). Le gain espéré est donc $\int_{b_1^{-1}(p)}^{b_1^{-1}(p+\varepsilon)} (v_1 - b_1(w)) \frac{dw}{(\overline{v} - b_1^{-1}(p))}$.
  - Si le joueur 2 reste en jeu, le joueur 1 perd le premier bien. Il y a un second tour si et seulement si $p + \varepsilon > \frac{1}{2}\, v_2$. Dans ce cas, $\frac{1}{2}\, v_2 < p + \varepsilon \sim b_1(v_1) < v_1$, et le joueur 1 emporte le second bien. Son gain est alors $\int_{b_1^{-1}(p+\varepsilon)}^{min(2(p+\varepsilon), \overline{v})} (v_1 - w/2) \frac{dw}{(\overline{v} - b_1^{-1}(p))}$.

  D'où l'utilité du joueur 1 :

$$U(\varepsilon, p) = \int_{b_1^{-1}(p)}^{b_1^{-1}(p+\varepsilon)} (v_1 - b_1(w)) \frac{dw}{\overline{v} - b_1^{-1}(p)} + \int_{b_1^{-1}(p+\varepsilon)}^{min(2\,(p+\varepsilon), \overline{v})} (v_1 - w/2) \frac{dw}{\overline{v} - b_1^{-1}(p)}$$

  La condition d'équilibre $\frac{\partial U}{\partial \varepsilon}(\varepsilon = 0, p = b_1(v_1)) = 0$ conduit à

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{b_1'(v_1)}(\frac{1}{2}\, v_1 - b_1(v_1)) + 2(v_1 - b_1(v_1)) = 0 & \text{si} \quad b_1(v_1) \leq \frac{1}{2}\, \overline{v} \\ \frac{1}{b_1'(v_1)}(\frac{1}{2}\, v_1 - b_1(v_1)) = 0 & \text{si} \quad b_1(v_1) \geq \frac{1}{2}\, \overline{v} \end{array}$$

  On montre pour conclure que la solution définit bien un équilibre de Nash en vérifiant qu'il n'y a pas de déviation profitable.

3.3 Evolution des prix de vente des 2 objets

Ainsi que nous l'avons souligné précédemment, les cas $k \geq 1$ ne modifient en rien les bids proposés par les joueurs, si bien que l'évolution des prix sera la même que celle en l'absence d'option d'achat. Néanmoins, le cas $k < 1$ mérite un commentaire : l'introduction d'une option d'achat augmente les bids des joueurs lors de la première enchère, si bien que le prix de vente du premier objet est supérieur à ce qu'il était sans option d'achat : $p_1^{avec\ option} > p_1^{sans\ option}$. Par contre, si le vainqueur n'exerce pas son option (et donc s'il y a une seconde enchère), le second objet est nécessairement vendu à un prix inférieur au premier, si bien que l'on assiste à une *inversion de l'évolution des prix* : $p_1^{avec\ option} > p_2^{avec\ option}$.

3.4 Application : le revenu du vendeur

Une question importante dans le choix du type d'enchères et de l'introduction ou non d'options d'achats est leur incidence sur le revenu du vendeur. Supposons une vente aux enchères de deux biens, à laquelle participent deux joueurs, attribuant chacun une valeur v_i au premier bien et $k\ v_i$ au second. Supposons que $v_1 > v_2$.

En l'absence d'option d'achat, le premier bien est vendu au prix de $b_1(v_2) = k\,v_2$, et le second bien est vendu au prix de $\min(k\,v_1, v_2)$. L'espérance de revenu du vendeur est en fait la même quel que soit le type d'enchère choisi parmi les quatre types possibles (résultat connu sous le nom de *théorème d'équivalence des revenus*).

Avec option d'achat, il y a également équivalence du revenu quand $k \geq 1$:

- $k > 1$: Le premier objet est attribué au prix de $k\,v_2$, le second au prix de $min(k\,v_1, v_2)$
- $k = 1$: Chaque objet est attribué au prix de v_2.

Par contre, lorsque $k < 1$, il s'avère, d'un point de vue empirique, que les enchères au premier prix et les enchères hollandaises génèrent un revenu plus important que les enchères anglaises ou au second prix.

De plus, l'introduction de l'option a en général pour effet d'augmenter le revenu du vendeur dans le cas des enchères anglaises ou au second tour. L'option a pour premier effet d'augmenter le prix auquel le premier item est vendu, mais, si elle est exercée, le prix de vente du second objet est inférieur à ce qu'il serait sans option d'achat. Si bien que *l'effet d'ensemble de l'instauration de l'option d'achat sur le revenu du vendeur est ambigu*. On peut remarquer à ce propos que, étant donnée la forme des équilibres stratégiques avec option d'achat, il est quasiment impossible de trouver un résultat théorique, si bien que l'on a fréquemment recours aux simulations afin de comparer le revenu du vendeur avec ou sans option d'achat. Dans tous les cas, on remarque qu'empiriquement, la mise en place d'une option d'achat a tendance à faire monter le revenu total du vendeur, ce qui justifie ex-post le choix fait dans les ventes aux enchères réelles (chez Christie's & Sotheby's par exemple).

3.5 Extension au cas multi-joueurs

Proposition *: La stratégie d'équilibre lorsqu'on a introduit les options est donnée par :*

- *tant que 3 joueurs au moins sont encore en jeu, chaque joueur reste en course jusqu'à sa propre valuation ; une fois qu'il ne reste que les 2 joueurs ayant la plus forte valuation, chacun adopte la stratégie b définie par :*

$$b(v) = \begin{cases} c(v) & si\ v_{n-2} \leq v \leq v_{n-2}/k \\ d(v) & sinon \end{cases}$$

où v_{n-2} est la troisième plus grande valuation (le $(n-2)^e$ à s'être retiré) et où C et d sont solutions de :

$$\begin{cases} K(c(v) - v_{n-2})f(v) = (v - c(v))f(c(v)/k)c'(v) \\ K(d(v) - kv)f(v) = (v - d(v))f(d(v)/k)d'(v) \\ C(v_{n-2}/k) = d(v_{n-2}/k) \\ C(v_{n-2}) = v_{n-2} \end{cases}$$

- *Le vainqueur du premier bien exerce l'option si la valuation qu'il porte au second bien est supérieure au prix d'acquisition, i.e.* $kv > p_1$.
- *Dans l'enchère pour le second bien, chaque joueur joue la valuation qu'il accorde au bien.*

Concernant l'exercice de l'option, puisque $c(v) \leq v$ et $d(v) \leq v$, les autres joueurs vont se montrer plus agressifs au second tour qu'au premier, le vainqueur ne va pas prendre de risque, et va exercer son option si elle lui permet de gagner le second bien à un prix inférieur à la valuation.

4 Adéquation théorie - Expériences

Il s'agit de vérifier si les conclusions obtenues dans un cadre théorique précis sont applicables à des cas concrets. Nous nous appuyons pour cela sur les résultats de l'expérience menée à l'ENSAE en mars 2001.

4.1 Des comportements pas toujours très rationnels

Dans des enchères séquentielles sans option d'achat, les joueurs n'ont que partiellement compris les implications stratégiques de l'équilibre de Nash dans les paris réalisés lors de la 1^{ere} enchère. Ceci est à vrai dire peu surprenant, étant donné que les personnes qui se sont soumises à ce test n'ont pas nécessairement été sensibilisées à ces concepts et n'ont pas forcément suivi de cours portant dans ce domaine précis, d'autant plus que l'équilibre de Nash obtenu dans le cas d'une enchère sans option d'achat est tout sauf intuitif (excepté dans le cas particulier $k = 1$ où la ligne de conduite à adopter est de proposer sa valuation pour le premier objet).

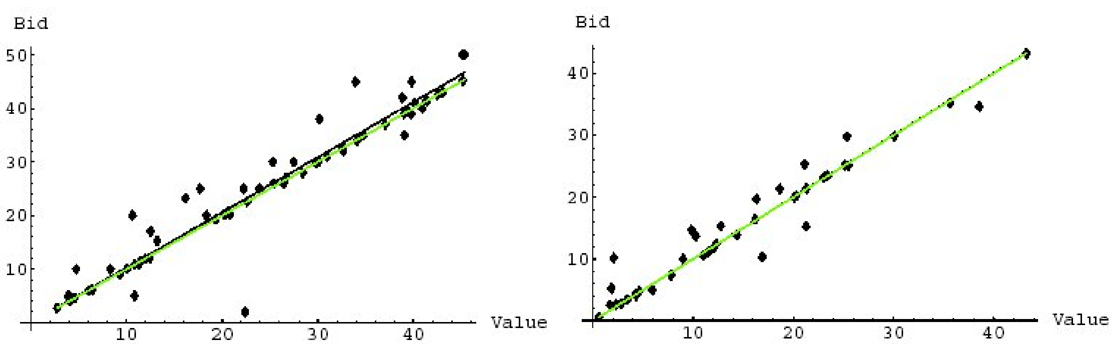

FIG. 1 – Bids pour des enchères anglaises et au second prix ($k = 1$) : accord entre la théorie et l'expérience

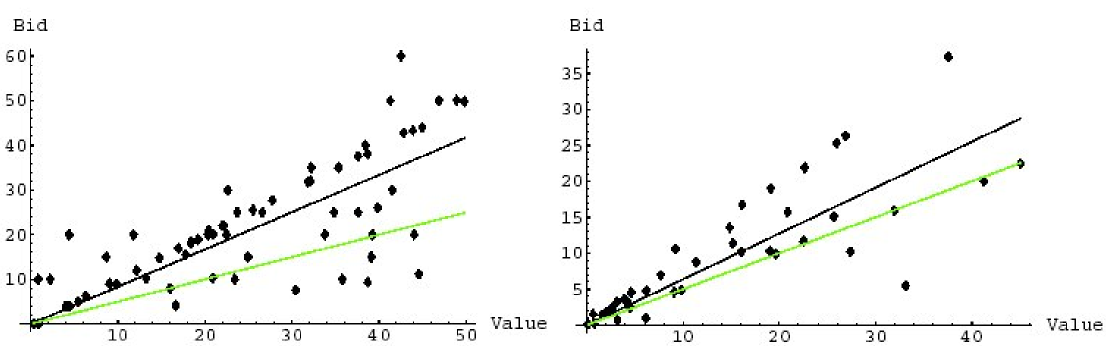

FIG. 2 – Bids pour des enchères anglaises et au second prix ($k = 1/2$) : divergence entre la théorie et la pratique

On remarque donc que les prédictions théoriques pour l'offre dans la 1^{ere} enchère sont largement rejetées dans le cas où k diffère de 1. Il est toutefois intéressant de noter que les joueurs ont "suivi" d'une certaine façon la théorie prévue en proposant une offre inférieure (resp. supérieure) à leur valuation v si $k < 1$ (resp. $k > 1$), même si la valeur jouée n'est pas celle prévue par la théorie (les joueurs jouent de façon trop "timorée" dans la mesure où ils surenchérissent (ou sous-enchérissent) de façon trop modeste par rapport à l'attitude qu'ils devraient avoir en théorie). L'analyse des bids lors de la seconde enchère est en revanche bien plus conforme à la théorie vue ci-dessus (la stratégie dominante à utiliser est dans ce cas intuitive) : dans 80% des cas environ, le bid des joueurs lors de la 2^{nde} enchère était en accord avec la théorie. Les joueurs font ainsi preuve d'une *rationalité limitée*, dans la mesure où ils sont capables de résoudre correctement le problème final (bid lors de la 2^{nde} enchère), mais ne mènent pas jusqu'au bout la récurrence arrière leur permettant de déboucher sur l'équilibre de Nash.

On remarque aussi que les résultats ne sont pas complètement en accord avec la théorie en ce qui concerne l'évolution des prix dans le cas sans option d'achat : dans les cas $k \leq 1$, on devrait observer $p_1 < p_2$, alors que ce résultat est rejeté lorsque l'on analyse les données fournies lors de l'expérimentation. Ce résultat peut certes s'expliquer par le fait que les joueurs, n'ayant pas tendance à jouer leurs stratégies d'équilibre (du moins pour la première enchère), n'ont pas proposé les offres prévues par la théorie, ce qui fausse logiquement le résultat obtenu concernant l'évolution des prix.

En outre, un comportement irrationnel a tendance à survenir dans le cas d'enchères au second prix ou anglaises (sans option d'achat) et dans le cas $k > 1$: le perdant de la première enchère adopte une attitude punitive vis-à-vis de son rival en proposant une offre significativement plus élevée que sa propre valuation. Il s'agit là d'un comportement relativement surprenant : le perdant de la 1ère enchère propose une offre supérieure en moyenne à 20% à sa propre valuation, alors qu'il dispose d'une stratégie dominante qui consiste à jouer sa valuation ! Cette attitude peut se justifier de la façon suivante : le perdant de la 1^{ere} enchère sait qu'il n'a aucune chance de gagner le second objet (le vainqueur jouant à nouveau $k\ v_1$ alors que lui va jouer v_2), et donc propose une offre supérieure à sa propre valuation, dans le but de pénaliser son adversaire (qui devra payer le prix proposé par le perdant) et sans prendre un risque trop élevé. Il semblerait donc qu'on ne puisse exactement mesurer l'utilité d'un des joueurs simplement en prenant la différence *valuation de l'objet - prix payé*, mais qu'il faille ajouter une composante qui prenne en compte ce facteur (sous la forme par exemple $U_i = 1_{b_i > b_{-i}}(v_i - b_{-i}) - \alpha U_{-i}$ où α est un coefficient pondérant l'importance pour un joueur de pénaliser l'autre).

4.2 L'influence de l'option d'achat

L'introduction d'une option d'achat ainsi que le bénéfice que l'on peut en tirer sont manifestement bien compris par les joueurs, qui ont, dans la plupart des cas, exercé leur option à raison. Il s'agit en réalité d'effectuer une comparaison entre le gain procuré par l'achat immédiat du 2^e bien, par rapport à l'espérance de gain procurée s'il est acquis lors d'une 2^{nde} enchère. Le vainqueur a intérêt à exercer son option dès que $k\ v > p_1$, à moins qu'il n'anticipe une offre peu agressive de son adversaire. Ainsi que nous l'avons vu précédemment, il est optimal pour le vainqueur d'exercer son option lorsque $k \leq 1$, ce que les joueurs ont respecté dans la majorité des cas. Dans le cas $k > 1$, si le joueur 1 gagne la 1^{ere} enchère, il acquiert l'objet pour le prix $2\ v_2$; or le joueur 2 peut deviner sa valuation v_1 et proposer (action punitive) $2\ v_1 - \varepsilon$, si bien que, en général, il est préférable pour le joueur 1 d'exercer directement son option pour éviter une punition de la part de son adversaire lors d'une 2^{nde} enchère.

Une autre remarque digne d'intérêt est que la disponibilité d'une option d'achat n'a que peu d'influence sur les offres proposées lors de la 1^{ere} enchère : alors que le modèle théorique prévoit par exemple des bids bien plus agressifs dans le cas $k < 1$, il n'en est souvent rien dans des cas expérimentaux. On voit ainsi que le rôle de l'option d'achat n'est pas correctement anticipé par les joueurs lorsqu'ils choisissent leurs stratégies de 1ère enchère.

Enfin, on a constaté empiriquement que l'introduction d'une option d'achat pouvait causer une diminution du prix ($p_2 < p_1$), alors que les prix ont tendance à rester constants (voire à augmenter) en l'absence d'option d'achat. Ce phénomène, également observé aux Pays-Bas à Aalsmeer, est une conséquence directe pour certains chercheurs de la présence de l'option d'achat, des études en cours tentent d'éclaircir ce point.

5 Conclusions

5.1 Enseignements

Nous avons vu à travers ce mémoire que l'option d'achat n'induit pas d'effet univoque sur le prix de vente des différents biens ou sur les gains du vendeur. Il faut à chaque fois distinguer suivant les divers types d'enchères ainsi que la valeur du paramètre k qui joue un rôle crucial dans la façon dont les joueurs font leur offre.

Les stratégies d'équilibre mises en évidence dans le cas d'enchères avec ou sans option d'achat demeurent des résultats théoriques, qui ne sont que partiellement observés en réalité, ceci étant principalement dû à certaines hypothèses du modèle assez peu réalistes.

5.2 Limites du modèle et modifications proposées

La plupart de notre étude repose sur un jeu comportant uniquement 2 joueurs ; or il ne s'agit là que d'une approximation grossière de la réalité, il suffit de jeter un coup d'oeil aux salles de vente aux enchères pour se convaincre que les acheteurs se comptent plutôt par dizaines ! De même, si l'on observe les articles vendus chez Drouot ou à Aalsmeer, les lots contiennent en général plus de 2 unités, ce qui vient encore compliquer l'étude théorique : il faut alors définir la valuation de chaque joueur à détenir j objets, déterminer les stratégies d'équilibre possibles lors des différentes enchères pouvant avoir lieu,... En outre, il ne s'agit plus simplement de répondre à la question de savoir s'il est optimal d'exercer son option ou non, encore faut-il savoir combien d'unités il est optimal d'acheter ! En outre, il faut également tenir compte du fait qu'au fur et à mesure que l'enchère se déroule, le nombre de participants diminue (ceux qui ont acheté le nombre d'unités qu'ils souhaitaient acquérir se retirent de l'enchère) d'où une baisse de la compétition, mais aussi du fait que le nombre d'objets restant diminue, d'où une hausse de la compétition. Un modèle traitant le cas multi-unités se devrait donc de prendre également en compte ces paramètres.

De plus, l'hypothèse qui permet de relier les valuations d'un même acheteur est elle aussi extrêmement discutable : le paramètre k, qui est commun à tous les joueurs dans notre modèle, peut prendre en réalité des valeurs diverses suivant les individus. Chacun n'estimera pas de la même manière le bien-être supplémentaire apporté par l'acquisition d'un second item par rapport à la détention d'un seul objet, si bien que cette hypothèse peut sembler peu convaincante. C'est pourquoi Black et De Meza ont proposé un modèle généralisé, en tirant pour chaque joueur sa valuation v_2 pour le 2^e objet suivant une loi conditionnelle à sa valuation v_1 pour le 1^{er} objet.

En outre, le modèle considéré traite chaque enchère comme un acte complètement isolé, sans prendre en compte l'existence d'autres ventes d'objets, le tout pouvant parfois se dérouler simultanément. Utiliser le modèle vu ci-dessus, c'est alors faire abstraction des synergies pouvant exister entre ces différentes enchères, étant donné qu'un acheteur potentiel peut être intéressé par plusieurs lots, et que son bid peut dépendre à la fois des achats qu'il a déjà effectués mais également de ses aspirations envers d'autres lots qui seront vendus aux enchères ultérieurement (soulignons que certaines ventes aux enchères peuvent avoir lieu simultanément, c'est notamment le cas à Aalsmeer par exemple). Une extension du modèle dans ce sens paraît extrêmement délicate à mener, tant les nouveaux paramètres dont il faudrait tenir compte sont subjectifs et propres à chacun.

Enfin, les enchères qui se déroulent de “façon dynamique” (enchères anglaises ou hollandaises) ne sont pas tout à fait compatibles avec le fait que la valuation de chaque joueur est fixée avant le début de l’enchère. Chaque acheteur dispose certes d’informations différentes et privées sur le bien à acquérir, mais les enchères qui se déroulent “dans le temps” peuvent avoir pour conséquence une revalorisation de la valuation accordée par chaque joueur durant le déroulement de l’enchère. Chaque acheteur essaiera de tirer parti des signaux observés chez les autres acheteurs. Ce pourquoi les joueurs auront peut-être tendance à partir d’une valuation relativement basse pour le 1er objet, le but étant de duper les autres acheteurs en leur faisant croire que les objets vendus aux enchères sont de faible qualité, si bien qu’il pourra acquérir les suivants à des prix moindres. Il y a là un facteur psychologique capable d’influer sur le bid proposé par chaque acheteur et dont il faudrait tenir compte dans un modèle plus complet (mais également plus complexe). Toute cette composante tactique mérite un développement approfondi, en particulier dans le cas d’une vente de plusieurs unités (> 2) d’un même bien, et fait en conséquence l’objet de nombreuses études à l’heure actuelle.

Références

[1] *Buy or wait, that is the option*
P. Février, L. Linnemer, M. Visser, 2002

[2] *Systematic price differences between successive auctions are no anomaly*
J. Black, D. De Meza Journal of Economics & Management Strategy, Volume 1, Number 4, Winter 1992

[3] *The revenue-effect of the buyer's option in multi-unit ascending auctions : the case of wine auctions at Drouot*
P. Février, W. Roos, M. Visser, 2002

[4] *An empirical model of multi-unit, sequential, oral, ascending-price auctions*
S. Donald, H Paarsch, J. Robert, 2002

[5] *The declining price anomaly in Dutch rose auctions*
G. J. Van Den Berg, J. C. Van Ours, M. P. Pradhan, 2001